Correction du devoir surveillé $n°6$

Partie A

On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (6x-4y, 9x-6y) \end{array}$$

1. Soit $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f((x_1,y_1)+\lambda(x_2,y_2)) &= f((x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2)) \\ &= (6(x_1+\lambda x_2)-4(y_1+\lambda y_2), 9(x_1+\lambda x_2)-6(y_1+\lambda y_2)) \\ &= (6x_1-4y_1, 9x_1-6y_1)+\lambda(6x_2-4y_2, 9x_2-6y_2) \\ &= f((x_1,y_1))+\lambda f((x_2,y_2)) \end{aligned}$$

   Donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2. (a) $\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 6x-4y=0 \text{ et } 9x-6y=0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 3x=2y\} = \mathrm{Vect}((2,3))$.
   $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1,0), f(0,1)) = \mathrm{Vect}((6,9),(-4,-6)) = \mathrm{Vect}((2,3))$.
   La famille $((2,3))$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et aussi de $\mathrm{Im}(f)$.

   (b) On a donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((2,3)) = \mathrm{Im}(f)$.
   Soit $x \in E$,

$$f \circ f(x) = f(\underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im}(f)=\mathrm{Ker}(f)}) = 0\,.$$

   Donc $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)}$.

On pose maintenant

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{22}\cdot(2y,-x) \end{array}$$

C'est une application linéaire, on ne demande pas de le vérifier.

3. $\mathrm{Ker}(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2y=0 \text{ et } -x=0\} = \{0,0\}$. Donc g est injective.
   De plus, c'est un endomorphisme en dimension finie donc c'est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

4. (a) On pose $e_1=(1,0)$ et $e_2=(0,1)$.
   On a

$$(f\circ g+g\circ f)(e_1) = \frac{1}{22}f((0,-1))+g((6,9)) = \frac{1}{22}\left((4,6)+(18,-6)\right) = e_1$$

   et

$$(f\circ g+g\circ f)(e_2) = \frac{1}{22}f((2,0))+g((-4,-6)) = \frac{1}{22}\left((12,18)+(-12,4)\right) = e_2$$

   (b) Les applications $f\circ g+g\circ f$ et $id_{\mathbb{R}^2}$ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ qui coïncident sur une base de $\mathbb{R}^2$ donc elles sont égales i.e. $f\circ g+g\circ f = id_{\mathbb{R}^2}$.

Partie B

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $f,g \in \mathscr{L}(E)$ tels que

$$\begin{array}{ll} (1) & f\circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \\ (2) & f\circ g+g\circ f = id_E \end{array}$$

1. (a) Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $\exists x \in E$, tel que $y = f(x)$.
$f(y) = f(f(x)) \underset{(1)}{=} 0_E$ donc $y \in \mathrm{Ker}(f)$. D'où $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
   (b) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. On a $(f \circ g + g \circ f)(x) \underset{(2)}{=} x$ i.e. $f(g(x)) + g(0_E) = x$ i.e. $x = f(g(x)) \in \mathrm{Im}(f)$.
D'où $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.
   (c) On a $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.
D'après le théorème du rang, $n = \dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2\underbrace{\mathrm{rg}(f)}_{\in \mathbb{N}}$.

Donc n est pair.
2. On compose à gauche par f dans l'égalité (2) et on obtient $f \circ g \circ f = f$ grâce à l'égalité (1).
On a $f \circ g \in \mathscr{L}(E)$ et $(f \circ g)^2 = (f \circ g \circ f) \circ g = f \circ g$. Donc $f \circ g$ est un projecteur.

On pose $F = \mathrm{Im}(f)$ puis $G = g(F)$.

3. Montrons que $F = \mathrm{Im}(f \circ g)$.
On a $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$ donc l'inclusion retour est triviale.
Soit $x \in F$. Or $F = \mathrm{Ker}(f)$, donc $f(x) = 0$. On évalue en x dans (2) et on obtient $f(g(x)) = x$.
D'où $x \in \mathrm{Im}(f \circ g)$.
Conclusion : $F = \mathrm{Im}(f \circ g)$.
Montrons que $G = \mathrm{Ker}(f \circ g)$.
Soit $y \in G$, donc il existe $x \in F$ tel que $y = g(x)$. Par conséquent, il existe $z \in E$, $x = f(z)$ d'où $y = g(f(z))$.
Calculons
$$f(g(y)) \underset{(2)}{=} y - g(f(y)) = y - (g \circ f \circ g \circ f)(z) \underset{Q2}{=} y - g(f(z)) = 0$$
Donc $y \in \mathrm{Ker}(f \circ g)$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f \circ g)$. On évalue en x dans (2) et on obtient $g(f(x)) = x$ d'où $x \in g(\mathrm{Im}(f)) = G$.
Conclusion : $G = \mathrm{Ker}(f \circ g)$.
4. D'après la question précédente, F et G sont les sous-espaces caractéristiques du projecteur $f \circ g$, ils sont donc supplémentaires dans E.

Partie C

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $2m$ où $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang m tel que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. (a) Par définition du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = m$.
De plus, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) = 2m - m = m$.
   (b) Or $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Par égalité des dimensions, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

On pose $F = \mathrm{Im}(f)$ et soit G un supplémentaire de F dans E.

2. On a $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F) = 2m - m = m$.

On introduit l'application linéaire
$$h : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

3. (a) Pour tout $x \in G$, $x \in D_f = E$ et $f(x) \in \mathrm{Im}(f) = F$ donc l'application h est bien définie.
De plus, elle est linéaire par linéarité de f.
   (b) On a $\mathrm{Ker}(h) = G \cap \mathrm{Ker}(f) = G \cap F = \{0_E\}$.
   (c) L'application h est une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension $m \in \mathbb{N}^*$ donc h est un isomorphisme.

Posons g l'endomorphisme de E défini par $g_{|F} = h^{-1}$ et $g_{|G} = 0_{\mathscr{L}(G)}$.

4. Pour tout $x \in F$, $f \circ g(x) + g \circ f(\underbrace{x}_{\in \mathrm{Ker}(f)}) = f \circ h^{-1}(x) = x$.
Pour tout $x \in G$, $f \circ g(x) + g \circ f(x) = g(\underbrace{f(x)}_{\in F}) = h^{-1}(f(x)) = x$.

Les applications $f \circ g + g \circ f$ et id_E sont des endomorphismes de E qui coïncident sur F et G. Or F et G sont supplémentaires dans E donc $f \circ g + g \circ f = id_E$.

Partie D

On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_5[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_5[X] \\ P & \longmapsto & P''' \end{array}$$

1. (a) Une base de $\mathbb{R}_5[X]$ est $(1, X, X^2, X^3, X^4, X^5)$ et $\dim(\mathbb{R}_5[X]) = 6$.
   (b) La linéarité de f découle de la linéarité de l'endomorphisme de dérivation.
   De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}_5[X]$, $f \circ f(P) = P^{(6)} = 0$. Donc $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}_5[X])}$.
   (c) $\mathrm{Ker}(f) = \{P \in \mathbb{R}_5[X], P''' = 0\} = \mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3.
   D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) = 6 - 3 = 3$.

On pose $F = \mathrm{Ker}(f)$ et $G = \mathrm{Vect}(X^3, X^4, X^5)$.

2. On a $F + G = \mathrm{Vect}(1, X, X^2) + \mathrm{Vect}(X^3, X^4, X^5) = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, X^3, X^4, X^5) = \mathbb{R}_5[X]$.
   De plus, $\dim(F) + \dim(G) = 3 + 3 = 6 = \dim(\mathbb{R}_5[X])$. D'après la caractérisation des supplémentaires en dimension finie, G est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_5[X]$.
3. Nous sommes exactement dans le cadre de la partie précédente, on pose de la même manière

$$h: \begin{array}{ccc} G & \to & F \\ P & \mapsto & f(P) \end{array}$$

   Donc h est un isomorphisme. Posons g l'endomorphisme de E défini par $g_{|F} = h^{-1}$ et $g_{|G} = 0_{\mathscr{L}(G)}$.
   D'après la partie précédente, g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_5[X]$ tel que $f \circ g + g \circ f = id_{\mathbb{R}_5[X]}$.
   De plus, $h^{-1}(1) = \frac{X^3}{3!}$, $h^{-1}(X) = \frac{X^4}{4!}$ et $h^{-1}(X^2) = \frac{2X^5}{5!}$, donc pour tout $P = \sum_{k=0}^{5} a_k X^k \in \mathbb{R}_5[X]$,
   $g(P) = a_0 h^{-1}(1) + a_1 h^{-1}(X) + a_2 h^{-1}(X^2) = \frac{a_0}{3!}X^3 + \frac{a_1}{4!}X^4 + \frac{2a_2}{5!}X^5 = \frac{P(0)}{3!}X^3 + \frac{P'(0)}{4!}X^4 + \frac{P''(0)}{5!}X^5$.