Correction du devoir surveillé $n°6$

Problème I : deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_4[X]$

1. *Propriétés de F.*

   (a) $F = \text{Vect}(X^4 + X, X + 1)$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$. /1

   (b) La famille $(X^4 + X, X + 1)$ est libre et génératrice de F c'est donc une base de F. D'où $\dim(F) = 2$. /1

2. *Propriétés de G.*

   (a) G est non vide et inclus dans $\mathbb{R}_4[X]$ qui est un espace vectoriel. /1
   $\forall (P, Q) \in G^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (P + \lambda Q)'(1) = P'(1) + \lambda Q'(1) = 0$. Donc, $P + \lambda Q \in G$. D'où G est un sev de $\mathbb{R}_4[X]$.

   (b) On a donc $\dim(G) \leqslant 5$. Or, $P = X \notin G$ donc $G \subsetneq E$ donc $\dim(G) \leqslant 4$. /1

   (c) Tous les polynômes de la famille $(1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$ appartiennent à G. /1
   De plus, cette famille est composée de polynômes non nuls échelonnés en degré donc c'est une famille libre de G.

   (d) Les familles libres ont moins de vecteurs que les bases donc $\dim(G) \geqslant 4$. Par double inégalité, $\dim(G) = 4$ et la famille $(1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$ est une base (en particulier une famille génératrice) de G. /1

3. *Propriétés de $F + G$.*

   (a) On a $F + G = \text{Vect}(X^4 + X, X + 1, 1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$. /1

   (b) Or $(X + 1, 1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$ est une famille de polynômes non nuls de degrés distincts de cardinal $5 = \dim(\mathbb{R}_4[X])$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_4[X]$. D'où $\mathbb{R}_4[X] = \text{Vect}(X+1, 1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4) \subset F+G$.
   D'où $\mathbb{R}_4[X] = F + G$. /1

4. (a) Il s'agit de la formule de Grassman. /1
   $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) = 6 - \dim(F + G)$. Or, $\dim(F + G) = 5$ donc $\dim(F \cap G) = 1$.

   (b) $F \cap G = \left\{P = \alpha X^4 + (\alpha + \beta)X + \beta | (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, P'(1) = 0\right\} = \left\{\alpha X^4 + (\alpha + \beta)X + \beta | (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \beta = -5\alpha\right\}$.
   D'où $F \cap G = \text{Vect}(X^4 - 4X - 5)$. /1

Problème II : une asymptote affine

1. On a $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x \times 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} x$. /1

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x(1 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{3}} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$. Ainsi :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{=} x\left(1 + \frac{1}{3x} - \frac{1}{9x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x\left(1 + \frac{4}{3x} + \frac{13}{18x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \underset{x \to +\infty}{=} x + \frac{4}{3} + \frac{13}{18x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

   En particulier, $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} x + \frac{4}{3} + o(1)$. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc une asymptote affine au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = x + \frac{4}{3}$. On notera par la suite D cette asymptote. /1

3. D'après la question précédente, $f(x) - (x + \frac{4}{3}) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{13}{18x}$. Les équivalents préservant le signe, la courbe $\mathscr{C}_f$ se situe au dessus de D au voisinage de $+\infty$. /1

Problème III : Dérivation discrète dans $\mathbb{K}[X]$

1. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\Delta(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)(X + 1) - (P + \lambda Q)(X) = P(X + 1) - P(X) + \lambda\left(Q(X + 1) - Q(X)\right) = \Delta(P) + \lambda\Delta(Q).$$

   Ainsi, Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. /1

2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

   (a) Si P est un polynôme constant, soit $P(X) = c$ avec $c \in \mathbb{K}$. Alors $\Delta(P) = c - c = 0$. /1

   (b) Si $\deg(P) \geqslant 1$, écrivons $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_0$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots a_n \in \mathbb{K}$ avec $a_n \neq 0$.
   On a $P(X+1) = a_n(X+1)^n + \cdots + a_0 = a_n X^n + (na_n + a_{n-1})X^{n-1} + \dots$. /1
   Ainsi, $\Delta(P) = P(X+1) - P(X) = \underbrace{na_n}_{\neq 0} X^{n-1} + \dots$. Donc $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Tout comme Δ, Δ_n est une application linéaire. De plus, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(\Delta(P)) \leqslant \deg(P)$. Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $\Delta_n(P) \in \mathbb{K}_n[X]$. L'application Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. /1

   (b) Montrons que $\mathrm{Ker}(\Delta_n) = \mathbb{K}_0[X]$ par double inclusion. /1
   Soit $P \in \mathrm{Ker}(\Delta_n)$. On a $P(X+1) = P(X)$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$. Le polynôme $P - P(0)$ admet donc une infinité de racine, c'est par conséquent le polynôme nul. D'où $P = P(0)$ est un polynôme constant.
   Réciproquement, tous les polynômes constants sont dans le noyau de Δ_n d'où $\mathrm{Ker}(\Delta_n) = \mathbb{K}_0[X]$.

   (c) Par le théorème du rang, on a $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = \dim(\mathrm{Ker}(\Delta_n)) + \dim(\mathrm{Im}(\Delta_n))$. Or, $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(\Delta_n)) = 1$. Donc $\dim(\mathrm{Im}(\Delta_n)) = n$. /1

   (d) On a $\mathrm{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\dim(\mathrm{Im}(\Delta_n)) = n = \dim(\mathbb{K}_{n-1}[X])$. Ainsi $\mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$. /1

4. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Par surjectivité de Δ_n, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}[X]$ tel que $\Delta_n(P) = Q$ i.e. $\Delta(P) = Q$. Ainsi Δ est surjective. /1

5. $\Delta(1) = 0$ donc $\mathrm{Ker}(\Delta) \neq \{0\}$ d'où Δ n'est pas injective. /1